$\omega(0) = w$, $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t))$, eine Kurve in Ω,

die die Kurve $\alpha := X \circ \omega$ auf der Fläche X induziert.

Die Kurve α startet in $\alpha(0) = X(w)$ mit der

Anfangsgeschwindigkeit

$$\alpha'(0) = DX|_w (\omega'(0)) =$$

$$\omega_1'(0)\, X_u(w) + \omega_2'(0)\, X_v(w).$$

Für unsere Rechnungen sei α nach der Bogenlänge parametrisiert, $\alpha = \alpha(s)$. Dann ist $t(s) = \alpha'(s)$ der <u>Einheitstangentenvektor</u> und $\varkappa(s) = |\alpha''(s)|$ die <u>Krümmung</u> von α in s. Für $\varkappa(s) \neq 0$ ist der <u>Normalenvektor</u> $n(s)$ definiert durch die Gleichung $t'(s) = \varkappa(s)\, n(s)$. Nachfolgend sei (u_1, u_2) die Variable aus Ω, und wir benutzen <u>Summationskonvention</u>.

Aus

$$t(s) = \alpha'(s) = \omega_i'(s)\, X_{u_i}(\omega(s))$$

folgt

$$(1) \quad t'(s) = \alpha''(s) = \omega_i''(s)\, X_{u_i}(\omega(s)) + \omega_i'(s)\,\omega_j'\, X_{u_i u_j}(\omega(s)).$$

Wie üblich bezeichne $N : \Omega \to S^2$ die Gauß-Abbildung von X.

Man wählt $s = 0$ in (1) und bildet das Skalarprodukt mit $N(w) = N(\omega(0))$ (beachte $N \cdot X_{u_i} = 0$):

$$N(w) \cdot t'(0) = \omega_i'(0)\,\omega_j'(0)\, X_{u_i u_j}(w) \cdot N(w)$$

$$= \omega_i'(0)\,\omega_j'(0) \left[\frac{\partial}{\partial u_i} \underbrace{\left(X_{u_j}(w) \cdot N(w) \right)}_{=0} - X_{u_j}(w) \cdot N_{u_i}(w) \right]$$

$$= -\omega_i'(0)\,\omega_j'(0)\, X_{u_j}(w)\, N_{u_i}(w)$$

$$= -DX_w(\omega'(0)) \cdot DN_w(\omega'(0)) = \mathrm{II}_w(\omega'(0), \omega'(0))$$

$$= \mathrm{II}_w^{TX}(\alpha'(0), \alpha'(0)) = S_w(\alpha'(0), \alpha'(0)),$$

wo $S_w : T_w X \to T_w X$ die Weingarten-Abbildung ist und II die Zweite Fundamentalform.

Mit der Definition von $\varkappa$ und n wird daraus:

$$(2)\quad \varkappa(o)\, N(w)\cdot n(o) = \mathrm{II}_w^{TX}(\alpha'(o),\alpha'(o)),$$

und daraus erkennt man, dass II mit "Krümmung zu tun hat".

Längs α definieren wir die "Vektorfelder"

$$\overline{N}(s) := N(\omega(s)),\quad \overline{n}(s) := \overline{N}(s)\times t(s).$$

Es gilt $\overline{n}(s)\in T_{\omega(s)}X$, denn $\overline{n}(s)\perp t(s)$ und $\overline{n}(s)\perp\overline{N}(s) =$ Erzeuger von $\left(T_{\omega(s)}X\right)^{\perp}$, so dass $\overline{n}(s)$ nicht nur tangential ist, sondern sogar mit $t(s)$ eine O.N.B von $T_{\omega(s)}X$ bildet:

$$T_{\omega(s)}X = \operatorname{Span}[t(s),\overline{n}(s)]$$

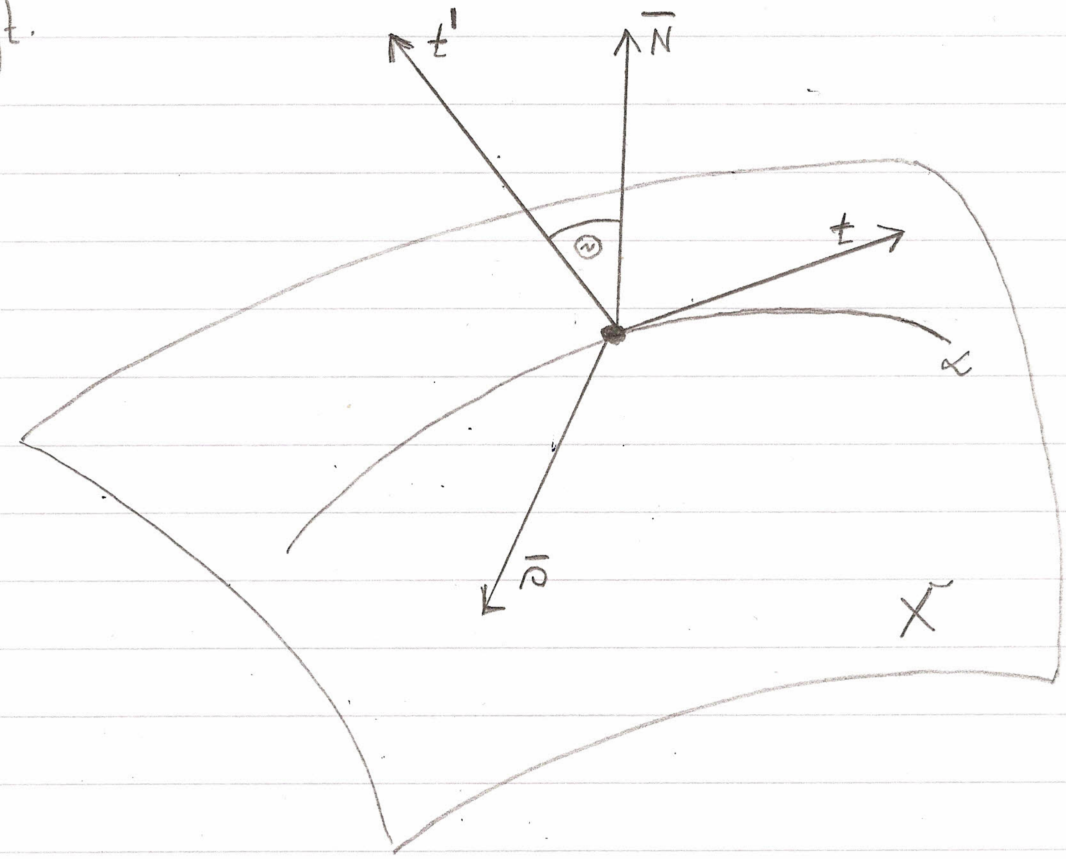
Der Vektor $t'(s)$ ist senkrecht zu $t(s)$, so dass

$$(3)\quad \boxed{t'(s) = \varkappa_g(s)\,\overline{n}(s) + \varkappa_n(s)\,\overline{N}(s)}$$

mit eindeutig bestimmten Skalaren $\varkappa_g(s)$, $\varkappa_n(s)$ gilt.

Offenbar ist (4) $\boxed{\varkappa_g = t' \cdot \bar{n}, \quad \varkappa_n = t' \, \bar{N}.}$

Die Skizze soll die Situation illustrieren. Wir haben dabei alle Vektoren - zur Vereinfachung - im Flächenpunkt $\underbrace{X(\omega(s))}_{=\alpha(s)}$ aufgehängt.



$\theta := \theta(s) :=$ Winkel zwischen t' und $\bar{N}$ zur Zeit s

$=$ Winkel zwischen $n(s)$ und $\bar{N}(s)$

<u>Definition</u>: Man nennt $\varkappa_g(s)$ bzw. $\varkappa_n(s)$ die <u>geodätische Krümmung</u> bzw. die <u>Normalkrümmung der Kurve α in s</u>.

[Do Carmo, deutsche Version p. 190]

Per Definition des Winkels $\tilde{\Theta}$ ist

$$\cos \tilde{\Theta}(s) = n(s) \bullet \overline{N}(s),$$

außerdem ergeben (3) und (4) wegen $t' = \varkappa\, n$

$$\varkappa = \sqrt{\varkappa_g^2 + \varkappa_n^2}\,.$$

Aus (3) folgt außerdem

$$\varkappa_g = t' \bullet \overline{\nu} = \varkappa\, n \bullet \overline{\nu} = \pm \varkappa \sin \tilde{\Theta},$$

$$\varkappa_n = t' \bullet \overline{N} = \varkappa\, n \bullet \overline{N} = \varkappa \cos \tilde{\Theta},$$

und gemäß (2) haben wir

$$(5) \qquad \boxed{\varkappa_n(0) = \mathrm{II}^{TX}_{\omega(0)}(\alpha'(0), \alpha'(0))}$$

D.h.: Fixieren wir einen Punkt w in Ω sowie einen Einheitsvektor $\xi \in T_w X$, so misst $\mathrm{II}^{TX}_w(\xi, \xi)$ die sogenannte Normalkrümmung einer Kurve α im Punkt

0, vorausgesetzt $\alpha(0) = X(w)$, $\alpha'(0) = \xi$, $\varkappa(0) > 0$ und α ist nach der Bogenlänge parametrisiert. (5) zeigt (schaue auf die rechte Seite!), dass der Wert $\varkappa_n(0)$ gar nicht davon abhängt, welche spezielle Kurve α man wählt, d.h. wir haben bewiesen

<u>Satz 8</u> <u>(von Meusnier)</u>:

Alle Kurven auf einer Fläche X, die in einem gegebenen Punkt dieselbe Tangente haben, besitzen in diesem Punkt dieselbe <u>Normalkrümmung</u>.

Die Krümmungen selbst müssen natürlich nicht gleich sein, der Satz stellt nur fest, dass die Eigenschaften, in der Fläche zu verlaufen und eine gemeinsame Tangente zu haben, einen Teil der Krümmung bereits festlegen.

< <u>Übung:</u> man diskutiere "alles" für den Fall, dass X

eine regulär parametrisierte Fläche ist $\rangle$.

Sei jetzt $\xi \in T_w X - \{0\}$ ein beliebiger Vektor, dessen Länge mit der Ersten Fundamentalform gemessen wird:

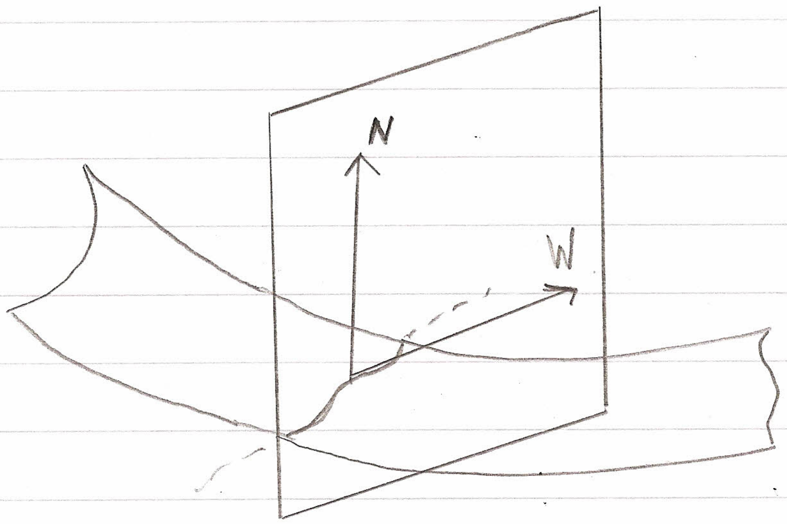
$$|\xi| = I_w(\xi, \xi)^{1/2}$$

Dann betrachtet man eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\tilde{\alpha}$ mit Spur auf der Fläche sowie $\tilde{\alpha}(0) = X(w)$, $\tilde{\alpha}'(0) = \xi / |\xi|$. Dann ergibt (5):

$$(6) \quad \boxed{\text{Normalkrümmung von } \tilde{\alpha} \text{ in } 0 = II_w(\xi, \xi) / I_w(\xi, \xi)}$$

Wir betrachten folgende Situation: Sei $w \in \Omega$ fixiert sowie ein Vektor $W(w) \in T_w X$. Dazu betrachten wir die Ebene, die von $W(w)$ und $N(w)$

aufgespannt wird und durch $X(w)$ verläuft.



Sei γ der Schnitt dieser Ebene mit X, also regulär mit $\gamma(0) = X(w)$, $\gamma'(0) = W$, Spur $\gamma \subset$ Bild $X \cap$ Ebene. Offenbar ist $t'(0) = \gamma''(0)$ Vielfaches von $N(w)$, denn alle Kurventangenten liegen in der Ebene, mithin auch $t'(0)$. Es folgt:

(7) $\quad \varkappa_g = 0 \quad$ und $\varkappa_n = \pm \varkappa$,

wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob $t'(0)$ und $N(w)$ gleichgerichtet sind. Eine Kurve der oben beschriebenen Art nennt man einen <u>Normalschnitt der Fläche X im Punkt $X(w)$.</u>

Gemäß (6) und (7) misst die sogenannte

$$\boxed{\text{Rayleigh - Quotient} \quad \mathrm{II}_w / \mathrm{I}_w}$$

die <u>Krümmungen aller möglichen Normalschnitte im Punkt</u> $X(w)$, wobei in $\mathrm{II}_w / \mathrm{I}_w$ der gewählte Vektor $W \in T_w X$ einzusetzen ist. Das Vorzeichen hängt davon ab, ob $n(0) = N(w)$ oder $= -N(w)$ ist. Im nächsten Abschnitt werden wir uns für die Extremwerte des Rayleigh - Quotienten interessieren, also für die größt - und kleinstmöglichen Krümmungen bei Normalschnitten.

§ 3 Krümmungsbegriffe für Flächen

Definition: Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche.

Die Zahlen

$$\varkappa_1(w) := \min \left\{ \mathrm{II}_w(V,V) / \mathrm{I}_w(V,V) : V \in T_w X - \{0\} \right\}$$

$$= \min \left\{ \mathrm{II}_w(V,V) : V \in T_w X, |V| = 1 \right\},$$

$$\varkappa_2(w) := \max \left\{ \mathrm{II}_w(V,V) : V \in T_w X, |V| = 1 \right\}$$

heißen die Hauptkrümmungen der Fläche X im Punkt w.

Bemerkungen: 1.) $\varkappa_1, \varkappa_2$ sind wohldefiniert, da $T_w X \ni V \mapsto \mathrm{II}_w(V,V)$ stetig ist, und die Einheitstangentenvektoren eine kompakte Menge bilden.

2.) Mit der Weingarten-Abbildung $S_w : T_w X \to T_w X$ können wir den $\mathrm{II}_w(V,V)$ durch $S_w(V) \cdot V$ ersetzen.

3.) Interpretation: Eine Fläche X hat in $X(w)$

zunächst nicht wie eine Kurve im Punkt eine kanonische Krümmung. Vielmehr schaut man sich Normalschnitte der Fläche X in $X(w)$ an, ermittelt mit dem Rayleigh-Quotienten (abgesehen vom Vorzeichen) die Krümmung dieser Schnittkurven und bestimmt davon Max. und Min.

4.) Es gibt $V_1, V_2 \in T_w X$ mit Länge 1, so dass

$$\varkappa_1(w) = \mathrm{II}_w(V_1,V_1),\ \varkappa_2(w) = \mathrm{II}_w(V_2,V_2)$$

gilt.

<u>Satz 9:</u> Sei X eine Fläche $\Omega \to \mathbb{R}^3$, $w \in \Omega$.

a) <u>Die Hauptkrümmungen sind genau die Eigenwerte der Weingarten-Abbildung</u> $S_w : T_wX \to T_wX$.

b) Es gibt Einheitsvektoren V_1, V_2 mit $V_1 \cdot V_2 = 0$ und $S_w(V_i) = \varkappa_i(w)\, V_i$. Solche Vektoren